6. LINIJSKI INTEGRAL DRUGE VRSTE

PREGLED TEORIJE

6.1. Neka je dat luk neke krive

$$\vec{r}=\vec{r}(t) \qquad (t\in[a, b]). \tag{1}$$

Ako se jednačinom (1) interval $[a, b]$ bijektivno preslikava na taj luk, tada uređenje intervala $[a, b]$ možemo na prirodan način prenijeti na skup tačaka luka uzimajući da je tačka T' ispred tačke T'' ako i samo ako za odgovarajuće vrijednosti parametra t vrijedi $t'<t''$. Pored ovog prirodno je još samo obrnuto uređenje skupa svih tačaka luka. Kad je taj skup uređen na jedan od ova dva načina, onda kažemo da je taj luk orijentisan. Ako su A i B krajnje tačke luka, tada orijentisani luk kome je prva tačka A, a zadnja tačka B označavamo sa $\widehat{AB}$. Za suprotnu orijentaciju imamo oznaku $\widehat{BA}$ i pišemo

$$\widehat{BA}=-\widehat{AB}.$$

Nadovezivanjem orijentisanih lukova dobijamo orijentisane lukove koji mogu sami sebe presijecati ili činiti zatvoren luk. Kod jednostavno zatvorene krive u ravni uzima se obično kao pozitivna ona orijentacija koja je suprotna smjeru kretanja kazaljke na satu (gledano sa odabrane strane ravni!); kod obilaženja tako orijentisane krive u smjeru orijentacije unutrašnja oblast ravni ograničena krivom ostaje stalno sa lijeve strane.

6.2. Neka je dat luk $\widehat{AB}$ po dijelovima glatke orijentisane krive (1). Duž tog luka neka je zadana ograničena vektorska funkcija

$$\vec{F}=\vec{F}(T)=P(x, y, z)\vec{i}+Q(x, y, z)\vec{j}+R(x, y, z)\vec{k}, \tag{2}$$

pri čemu je $T(x, y, z)\in\widehat{AB}$.

Za svaku podjelu luka diobenim tačkama $A=T_0, T_1, \ldots, T_n=B$ izabraćemo na svakom od komada $\widehat{T_{i-1}T_i}$ neku tačku T_i^* $(i=1, 2, \ldots, n)$ i u njoj odrediti jedinični vektor tangente $\vec{t}_{T_i^*}$. (Uzimamo da je svaki od komada gladak!). Komad $\widehat{T_{i-1}T_i}$ ima dužinu luka $\Delta s_i=s_i-s_{i-1}$. Sad možemo formirati sljedeću integralnu sumu

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(T_i^*)\cdot\vec{t}_{T_i^*}\,\Delta s_i. \tag{3}$$

Ako postoji konačna granična vrijednost

$$I = \lim_{\max d(\widehat{T_{i-1}T_i}) \to 0} \sigma_n, \tag{4}$$

tada se ta granična vrijednost označava ovako:

$$I = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}(T) \cdot d\vec{r} \tag{5}$$

i zove se linijski integral druge vrste funkcije (2) po luku $\widehat{AB}$.

Oznaka (5) dolazi otuda što se u integralnoj sumi pojavljuje vektor

$$\vec{t}_{T_i^*} \Delta s_i = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)_{T_i^*} \Delta s_i = (d\vec{r})_{T_i^*}.$$

Kako se u integralnoj sumi (3) pojavljuje izraz

$$\vec{F}(T) \cdot \vec{t} \Delta s = P(x, y, z) \cdot \Delta x + Q(x, y, z) \cdot \Delta y + R(x, y, z) \cdot \Delta z$$

izračunat u tački T_i^*, uobičajena je i oznaka

$$I = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}(T) \cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz. \tag{6}$$

6.3. Ako je u jednačini krive kao parametar uzet luk s, pa ako je

$$\vec{t} = \cos\alpha(s)\, \vec{i} + \cos\beta(s)\, \vec{j} + \cos\gamma(s)\, \vec{k}, \tag{7}$$

tada se integral (5) računa po formuli

$$\begin{aligned} I = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}(T) \cdot d\vec{r} = \int_{s_A}^{s_B} [&P(x(s), y(s), z(s)) \cos\alpha(s) + \\ &+ Q(x(s), y(s), z(s)) \cos\beta(s) + R(x(s), y(s), z(s)) \cos\gamma(s)]\, ds. \end{aligned} \tag{7}$$

Relacija (7) pokazuje da se računanje krivolinijskog integrala druge vrste funkcije (2) svodi na računanje određenog integrala funkcije u uglatoj zagradi na desnoj strani relacije (7).

U slučaju jednačine (1) računanje integrala (5) vrši se po formuli koja se dobije iz (7) kad se u ovoj integraciona varijabla s smijeni prema

$$s = \int_a^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt. \tag{8}$$

Drugim riječima, tada je

$$\begin{aligned} T = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}(T) \cdot d\vec{r} = \int_a^b [&P(x(t), y(t), z(t)) \cos\alpha(t) + \\ &+ Q(x(t), y(t), z(t)) \cos\beta(t) + \\ &+ R(x(t), y(t), z(t)) \cos\gamma(t)] \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt. \end{aligned} \tag{9}$$

6.4. Ako je relacijom (2) data sila koja djeluje na materijalnu tačku, a $\widehat{AB}$ predstavlja putanju te tačke, onda integral (5) daje rad koji izvrši sila (2) na putu $\widehat{AB}$.

U slučaju zatvorene krive C krivolinijski integral druge vrste predstavlja cirkulaciju dotičnog vektora (2) po krivoj C i označava se sa

$$I = \oint_C \vec{F}(T) \cdot d\vec{r}. \tag{5'}$$

6.5. Između krivolinijskog integrala druge vrste po zatvorenoj krivoj u ravni Oxy i dvostrukog integrala (podesne funkcije) po oblasti čiji je rub ta kriva postoji, uz određene pretpostavke, jednostavna veza data Grinovom (Green) formulom:

$$\oint_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right) dx\, dy. \tag{10}$$

U toj formuli C predstavlja pozitivno orijentisani rub ograničene oblasti G, za koji se pretpostavlja da je po dijelovima gladak, dok se o funkcijama $P(x, y)$, $Q(x, y)$ i parcijalnim izvodima $\dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial x}$ pretpostavlja da su neprekidne na G. Pri tome se rub C može sastojati iz jedne ili iz više jednostavno zatvorenih krivih, a pozitivna orijentacija ruba znači da obilaženjem ruba u smjeru orijentacije oblast G ostaje uvijek sa lijeve strane.

6.6. Ako se rub oblasti G sastoji iz samo jedne jednostavno zatvovorene krive C (jednostavno povezana oblast), a funkcije $P(x, y)$, $Q(x, y)$ i njihovi parcijalni izvodi $\dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial R(x, y)}{\partial y}$ su neprekidni na G, tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:

1) Za svaku po dijelovima glatku jednostavno zatvorenu krivu C' iz G vrijedi

$$\oint_{C'} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0;$$

2) Ako su A, B iz G, tada $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ ne zavisi od luka $\widehat{AB}$ iz G (nego samo od krajnjih tačaka A, B);

3) Postoji funkcija $U(x, y)$ koja je definisana na G, a diferencijabilna unutar G, za koju vrijedi

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = Q(x, y) \text{ (unutar } G).$$

4) Za funkcije $P(x, y)$, $Q(x, y)$ vrijedi $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ (unutar G).

Ako je jedan od ovih uslova ispunjen, tada se funkcija $U(x, y)$ iz 3) može izračunati ovako:

$$U(x, y) = \int_{\widehat{AB}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy, \tag{11}$$

pri čemu je $A(x_0, y_0)$ bilo koja fiksna tačka iz G, $B(x, y)$ unutrašnja tačka iz G, a $\widehat{AB}$ proizvoljna po dijelovima glatka spojnica tačaka A i B koja sva leži u G.

6.7. Grinova formula može se primijeniti i na ova dva slučaja:

1) Kriva C' iz oblasti G nije zatvorena i ima krajnje tačke A i B, ali G i funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ ispunjavaju opšte uslove tačke 6.6. Tada za svaku po dijelovima glatku krivu C'' koja spaja tačke A i B, a sva leži u G vrijedi

$$\begin{aligned}\int_{C'} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = & \int_{C''} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy + \\ & + \iint_{G'} \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right] dx\, dy,\end{aligned} \tag{12}$$

pri čemu je G' dio oblasti G obuhvaćen zatvorenom pozitivno orijentisanom krivom $C' \cup (-C'')$.

Krivu C'' treba birati tako da je što lakše izračunati integrale na desnoj strani relacije (12). Drugi od ta dva integrala je 0, ako je ispunjen bilo koji od uslova 1)—4) iz 6.6.

2) Rub oblasti G sastoji se od više zatvorenih krivih: $C_0, C_1, \ldots, C_n$ od kojih prva obuhvata ostale, a ostale ne leže ni dijelom jedna u drugoj. Tada za funkcije $P(x, y)$, $Q(x, y)$ koje zadovoljavaju opšte uslove i uslov 4) tačke 6.6., umjesto uslova 1) tačke 6.6. vrijedi:

$$\oint_{C'} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \sum_{i=1}^{r} \oint_{C_i} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \tag{13}$$

ukoliko C' obuhvata upravo krive $C_1, \ldots, C_r$; ukoliko C' ne obuhvata ni jednu od krivih $C_1, \ldots, C_n$, tada je desna strana relacije (13) jednaka 0.

ZADACI

Izračunati krivolinijske integrale:

268. $\int\limits_{l} xy\,dx$, gdje je l dio pozitivno orijentisane kružnice $x^2+y^2=a^2$ koji leži u prvom kvadrantu.

269. $\int\limits_{l} xy\,dy$, gdje je l luk parabole $x=y^2$ od tačke $A(1, -1)$ do tačke $B(1, 1)$.

270. $\int\limits_{l} xy\,dx+(x+y)\,dy$, gdje je l:

a) odsječak prave $y=x$ od $O(0, 0)$ do $B(1, 1)$
b) luk parabole $y=x^2$ od $O(0, 0)$ do $B(1, 1)$
c) izlomljena linija OAB, pri čemu je $A(1, 0)$.

271. $\int\limits_{\overset{\frown}{OM}} 3x^2y\,dx+(x^3+1)\,dy$, gdje je $O(0, 0)$, $M(1, 1)$,

a) duž prave $y=x$,
b) duž parabole $y=x^2$,
c) duž izlomljene linije OAM, $A(1, 0)$.

272. $\int\limits_{l} 2xy\,dx+x^2\,dy$, gdje je l:

a) duž OA, $O(0, 0)$, $A(1, 1)$,
b) luk parabole $y=x^2$ od O do A,
c) luk kubne parabole $y=x^3$ od O do A,
d) luk parabole $x=y^2$ od O do A.

273. $\int\limits_{l} x^2\,dx+xy\,dy$, gdje je l:

a) duž AB, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$
b) luk kružnice $x^2+y^2=1$ od A do B.

274. $\oint\limits_{l} (x^2+2xy)\,dy$, $\quad l: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

275. $\oint (x^2+y)\,dx + yx^2\,dy$, l je trapez koji obrazuju prave $y=0$, $x=0$,

$$x+y=1, \quad x+y=2.$$

276. $\oint xy\,dx + (x+y)\,dy$, l je zatvorena kontura koju obrazuju linije

$$y=0, \quad x=1, \quad y=x^2.$$

277. $\oint\limits_l x^2y\,dy - y^2x\,dx$, l je luk $x=\sqrt{\cos t}$, $y=\sqrt{\sin t}$, $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

278. $\oint (y-z)\,dx + z\,dz$, l je zavojnica $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$,

$$0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

279. $\oint\limits_l (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, l je elipsa

$$x^2+y^2=a^2; \quad \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1, \quad (a>0,\ h>0).$$

280. $\oint y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, l je (Vivanijeva) kriva

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x^2+y^2=ax, \quad (a>0,\ z\geqslant 0).$$

281. $\oint\limits_l (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, l je trougao u ravni

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

koji isjecaju koordinatne ravni.

282. $\oint\limits_l \dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}$, l je kontura kvadrata sa vrhovima $A(1,\,0)$, $B(0,\,1)$, $C(-1,\,0)$, $D(0,\,-1)$.

283. $\displaystyle\int\limits_{AB} \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}$, gdje je $A(1,\,1,\,1)$, $B(b,\,b,\,b)$, $(b>0)$.

Rješenja.

268. Stavljajući $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, biće

$$I=-a^3\int\limits_0^{\pi/2}\cos t\,\sin^2 t\,dt=-a^3\cdot\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{\pi/2}=-\frac{a^3}{3}.$$

269. $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} y^2\cdot y\cdot dy=\frac{y^4}{4}\Big|_{-1}^{1}=0.$

270. a) $I=\int\limits_0^1 (x^2+2x)\,dx=\frac{4}{3}.$

b) $I=\int\limits_0^1 [x^3+(x+x^2)\,2x]\,dx=\frac{17}{12}.$

c) $I=\int\limits_{OA}+\int\limits_{AB}=\int\limits_0^1 (1+y)\,dy=\frac{3}{2}.$

271. a) $I=\int\limits_0^1 (4x^3+1)\,dx=2;$

b) $I=\int\limits_0^1 (5x^4+2x)\,dx=2;$

c) $I=\int\limits_{OA}+\int\limits_{AB}=\int\limits_{OA} 3x^2 y dx+\int\limits_{AB} (x^3+1)\,dy=$

$=\int\limits_{AB} (x^3+1)\,dy=\int\limits_0^1 2\,dy=2.$

U zadatku 270. integral je zavisio od puta integracije, a u ovom zadatku ne zavisi.

272. a) $I=\int\limits_0^1 3x^2\,dx=1;$

b) $I=\int\limits_0^1 4x^3\,dx=1;$

c) $I=\int\limits_0^1 5x^4\,dx=1;$

d) $I=\int\limits_0^1 5y^4\,dy=1.$

273. a) $I=\int\limits_1^0 [x^2-x(1-x)]\,dx=-\frac{1}{6};$

b) $I=\int\limits_0^{\pi/2} (-\cos^2 t\sin t+\cos^2 t\sin t)\,dt=0.$

274. Stavimo $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ dy=b\cos t\,dt$; biće

$$I=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+2\,ab\cos t\sin t)\,b\cos t\,dt=a^2b\int_0^{2\pi}\cos^3 t\,dt+$$

$$+2\,ab^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin t\,dt.$$

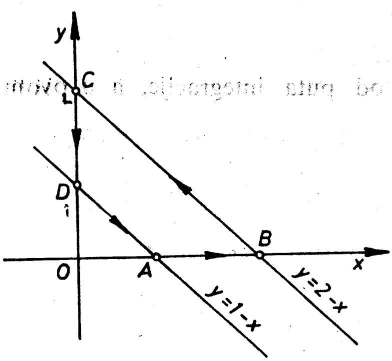
Uzimajući u obzir da je

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin t\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t\sin t\,dt=0$$

(zbog neparnosti funkcije $\cos^2 t\sin t$), to je

$$I=a^2b\int_0^{2\pi}\cos^3 t\,dt=a^2b\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)\cos t\,dt=$$

$$=a^2b\int_0^{2\pi}\cos t\,dt-a^2b\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t\,dt=0.$$



Sl. 75

275. Prema sl. 75 imamo

$$I=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}=\int_1^2 x^2\,dx+$$

$$+\int_2^0[(x^2+2-x)+(2-x)\,x^2(-1)]\,dx+$$

$$+\int_0^1[(x^2+1-x)+(1-x)\,x^2(-1)]\,dx=$$

$$=\frac{7}{3}+\int_2^0(x^2-x+2-2x^2+x^3)\,dx+$$

$$+\int_0^1(x^2-x+1-x^2+x^3)\,dx=\frac{7}{3}+\int_2^0(x^3-x^2-x+2)\,dx+$$

$$+\int_0^1(x^3-x+1)\,dx=\frac{1}{4}.$$

276. $\dfrac{1}{12}$.

277. Kako je $dx=-\dfrac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}dt,\ dy=\dfrac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}dt$, to je

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt=\frac{\pi}{4}.$$

278. Kako je $dx=-a\sin t\,dt,\ dz=b$, to je

$$I=\int_0^{2\pi}(a\sin t-bt)(-a\sin t)\,dt+\int_0^{2\pi}b^2t\,dt=$$

$$=-a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt+ab\int_0^{2\pi}t\sin t\,dt+2\pi^2b^2=2\pi^2b^2-\pi a^2-2\pi ab.$$

279. Parametarske jednačine elipse su $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=h(1-\cos t),\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$, pa je

$$I=\int_0^{2\pi}[(a\sin t-h+h\cos t)(-a\sin t)+(h-h\cos t-a\cos t)\,a\cos t+$$
$$+(a\cos t-a\sin t)\,h\sin t]\,dt=$$

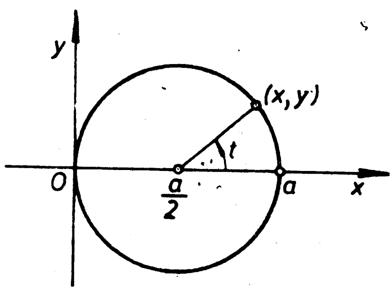
$$=\int_0^{2\pi}-ha\,dt-a^2\int_0^{2\pi}dt+ha\int_0^{2\pi}\sin t\,dt+ha\int_0^{2\pi}\cos t\,dt=-2a\pi(a+h).$$

280. Parametarske jednačine kružnice $x^2+y^2=ax$, tj. $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}$ (sl. 76) su $x-\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}\cos t,\ y=\dfrac{a}{2}\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Otud je

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos t}.$$

Prema tome,

$$I=\int_0^{2\pi}\Bigg[-\frac{a^3}{8}\sin^3 t+\frac{a^3}{4}\cos t-\frac{a^3}{4}\cos^2 t+\frac{a^3}{8\sqrt{2}}\frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos t}}+$$
$$+\frac{a^3}{4\sqrt{2}}\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{1-\cos t}}+\frac{a^3}{8\sqrt{2}}\frac{\cos^2 t\sin t}{\sqrt{1-\cos t}}\Bigg]dt.$$



Sl. 76

Kako je za neparnu funkciju $f(t)$ perioda 2π

$$\int_0^{2\pi}f(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt=0,$$

to je

$$I=\frac{a^3}{4}\int_0^{2\pi}\cos t\,dt-\frac{a^3}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=-\frac{a^3}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=$$

$$=-\frac{a^3}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=-\frac{a^3}{8}\int_0^{2\pi}dt=-\frac{a^3\pi}{4}.$$

281. $-(bc+ac+ab)$. **282.** 0.

283. $I=\int_1^b \frac{3x\,dx}{\sqrt{3x^2}}=\sqrt{3}\int_1^b dx=\sqrt{3}\,(b-1).$

Koristeći Grinovu formulu transformisati krivolinijske integrale u dvostruke:

284. $\oint_l [3x^2y+\sin(x+y)]\,dx+[x^3+\cos^2(x+y)]\,dy.$

285. $\oint_l \frac{y^2}{1+x^2}\,dx+3y\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}\,dy.$

Rješenja:

284. Grinova formula

$$\oint_l P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

pri čemu zatvorena kriva l obuhvata oblast D, važi ako su funkcije Q, P, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ i $\frac{\partial P}{\partial y}$ neprekidne u zatvorenoj oblasti D.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2-2\cos(x+y)\sin(x+y),\quad \frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+\cos(x+y),$$

pa važi

$$\oint_l [3x^2y+\sin(x+y)]\,dx+[x^3+\cos^2(x+y)]\,dy=$$

$$=-\iint_D \cos(x+y)\,[2\sin(x+y)+1]\,dx\,dy.$$

285. $\oint_l \frac{y^2}{1+x^2}\,dx+3y\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}\,dy=\iint_D \frac{y}{1+x^2}\,dx\,dy.$

Izračunati integral

286. $I=\oint_l (1-x^2)\,y\,dx+x\,(1+y^2)\,dy,$ gdje je $l: x^2+y^2=a^2$:

a) pomoću Grinove formule,

b) direktno.

Rješenje: a)

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq a^2} [(1+y^2)-(1-x^2)]\,dx\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq a^2} (x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho^3\,d\rho = 2\pi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^a = \frac{\pi a^4}{2}.$$

b) Stavljajući $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, dobija se

$$I = \int_0^{2\pi} [(1-a^2\cos^2 t)\, a\sin t\,(-a\sin t) + a\cos t\,(1+a^2\sin^2 t)\, a\cos t]\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -a^2\sin^2 t\,dt + a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt + 2a^4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\sin^2 t\,dt =$$

$$= 2a^4 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} \cdot \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^4}{2} \int_0^{2\pi} (1-\cos^2 2t)\,dt =$$

$$= a^4\pi - \frac{a^4}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 4t}{2} = a^4\pi - \frac{a^4\pi}{2} = \frac{a^4\pi}{2}.$$

Pomoću Grinove formule izračunati integrale:

287. $\oint\limits_l 2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy,$

gdje je l trougao određen tačkama $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$.

288. $\oint\limits_l (yx^3+e^y)\,dx + (xy^3+xe^y-2y)\,dy,$

gdje je l kvadrat $|x|+|y| = a$.

289. $\oint\limits_l e^x(1-\cos y)\,dx - e^x\,(y-\sin y)\,dy,$

gdje je l linija koja ograničava oblast $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \sin x$.

290. $\oint\limits_l (xy+x+y)\,dx + (xy+x-y)\,dy,$

gdje je l elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

291. $\oint\limits_{l} \sqrt{x^2+y^2}\, dx + y\,[xy + \ln(x + x^2 + y^2)]\, dy,$

gdje je l linija koja ograničava oblast $1 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 2.$

292. $\int\limits_{l} (e^x \sin y - m\, y)\, dx + (e^x \cos y - m)\, dy,$

gdje je l gornja polukružnica $x^2 + y^2 - ax = 0$ od $A(a, 0)$ do $O(0, 0)$.

293. $\int\limits_{l} [f(y)\, e^x - ay]\, dx + [f'(y)\, e^x - a]\, dy,$

gdje su $f(y)$ i $f'(y)$ neprekidne funkcije i l proizvoljna putanja koja spaja tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ a ograničava zajedno sa odsječkom $\overline{AB}$ figuru date površine P.

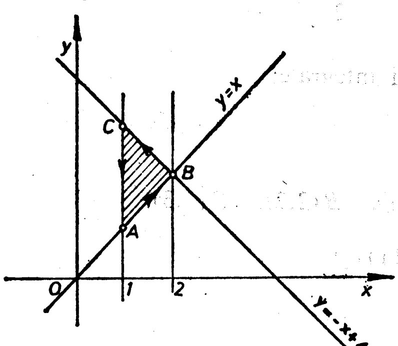
294. Izračunati

$$\int\limits_{l} [e^x f(y) + e^y g'(x) - y]\, dx + [e^x f'(y) + e^y g(x) + x]\, dy,$$

pri čemu je l po dijelovima glatki orijentisani luk koji spaja tačke $A(a, a)$ i $B(b, b)$, a sa duži $\overline{AB}$ ograničava oblast G površine P, dok su $f(y)$ i $g(x)$ neprekidno diferencijabilne funkcije na G.

Rješenja:

287. U ovom zadatku je $P(x, y) = 2(x^2 + y^2)$, $Q(x, y) = (x + y)^2$, dakle $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2(x + y) - 4y = 2(x - y)$. Kako je D oblast sa slike 77, biće



Sl. 77

$$I = \iint\limits_{D} 2(x-y)\, dy =$$

$$= 2\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x}^{4-x} (x-y)\, dy =$$

$$= 2\int\limits_{1}^{2} \left[xy - \frac{1}{2} y^2 \right]_{x}^{4-x} dx =$$

$$= 2\int\limits_{1}^{2} \left[x(4-x) - \frac{1}{2}(4-x)^2 - x^2 + \frac{1}{2} x^2 \right] dx = 4\int\limits_{1}^{2} (4x - x^2 - 4)\, dx =$$

$$= 4\left[2x^2 - \frac{1}{3} x^3 - 4x \right]_{1}^{2} = -\frac{4}{3}.$$

Neka student izračuna integral i direktno.

288. Biće

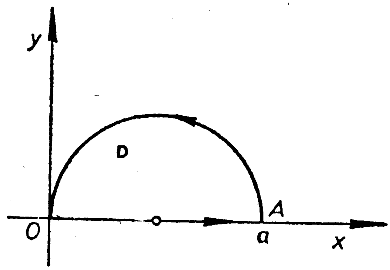
$$I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant a}(y^3-x^3)\,dx\,dy=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant a}y^3\,dx\,dy-\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant a}x^3\,dx\,dy=0,$$

jer je kvadrat simetričan u odnosu na koordinatni početak.

289. $-\frac{1}{5}(e^{\pi}-1)$. **290.** 0. **291.** 8.

292. Da bismo mogli primijeniti Grinovu formulu, posmatraćemo integral po zatvorenoj konturi, tj. pisaćemo

$$I=\int\limits_{\widehat{AO}}=\int\limits_{\widehat{AO}}+\int\limits_{\overline{OA}}-\int\limits_{\overline{OA}}=\oint\limits_{l_1}-\int\limits_{\overline{OA}},$$

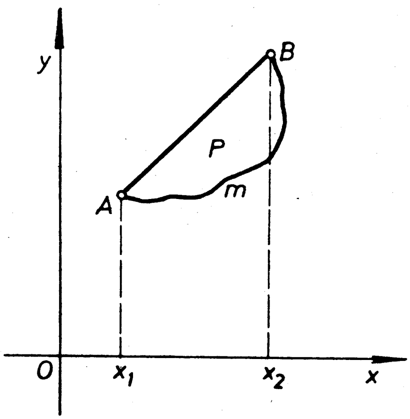


Sl. 78

gdje je $l_1=\widehat{AO}\cup\overline{OA}$ (sl. 78). Na integral po zatvorenoj konturi l_1 možemo primijeniti Grinovu formulu. Dobijamo

$$I=\iint\limits_{D}m\,dx\,dy-\int\limits_{\overline{OA}}=m\left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{\pi}{2}-0=\frac{ma^2\pi}{8}.$$

293. Dopunimo liniju $l=\widehat{AmB}$ sa duži $\overline{AB}$ da bismo dobili zatvorenu liniju l_1 (sl. 79). Biće:



Sl. 79

$$I=\int\limits_{l}=\int\limits_{\widehat{AmB}}=\int\limits_{\widehat{AmB}}+\int\limits_{\overline{BA}}-\int\limits_{\overline{BA}}=\oint\limits_{l_1}+\int\limits_{\overline{AB}},$$

tj.

$$I=\iint\limits_{D}a\,dx\,dy+\int\limits_{\overline{AB}}=a\cdot P+\int\limits_{\overline{AB}}.$$

Kako je je jednačina prave AB:

$$y=x\,\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{x_2y_1-y_2x_1}{x_2-x_1},$$

to je

$$\int\limits_{\overline{AB}}=\int\limits_{x_1}^{x_2}f\left(x\,\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{x_2y_1-y_2x_1}{x_2-x_1}\right)\cdot e^x\,dx-$$

$$-a\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\,x+\frac{x_2y_1-y_2x_1}{x_2-x_1}\right)dx+$$

$$+\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[f'\left(x\,\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{x_2y_1-y_2x_1}{x_2-x_1}\right)e^x-a\right]\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\,dx.$$

Za izračunavanje prvog integrala primijenimo parcijalnu integraciju stavljajući

$$u=f\left(x\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}\right),\quad dv=e^x\,dx.$$

Biće

$$\int_{x_1}^{x_2} f\left(x\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{x_2y_1-y_2x_1}{x_2-x_1}\right)e^x\,dx=$$

$$=f\left(x_2\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{x_2y_1-y_2x_1}{x_2-x_1}\right)e^{x_2}-f\left(x_1\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{x_2y_1-y_2x_1}{x_2-x_1}\right)e^{x_1}-$$

$$-\int_{x_1}^{x_2} f'\left(x\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{x_2y_1-y_2x_1}{x_2-x_1}\right)e^x\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\,dx=f(y_2)\,e^{x_2}-f(y_1)\,e^{x_1}-$$

$$-\int_{x_1}^{x_2} f'\left(x\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{x_2y_1-y_2x_1}{x_2-x_1}\right)e^x\,\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\,dx.$$

Sada je

$$\int_{AB}=f(y_2)\,e^{x_2}-f(y_1)\,e^{x_1}-a\,(y_2-y_1)\,\frac{(x_2+x_1)}{2}-a\,(x_2y_1-y_2x_1)-a\,(y_2-y_1)=$$

$$=f(y_2)\,e^{x_2}-f(y_1)\,e^{x_1}-a\,(y_2-y_1)-\frac{a}{2}(x_2-x_1)\,(y_2+y_1).$$

Konačno je:

$$I=aP+e^{x_2}f(y_2)-e^{x_1}f(y_1)-a\,(y_2-y_1)-\frac{a}{2}(x_2-x_1)\,(y_2+y_1).$$

294. Rezultat: $e^b[f(b)+g(b)]-e^a[f(a)+g(a)]+2P$.

295. Izračunati integral

$$\oint_l \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2},$$

pri čemu linija l ne prolazi kroz tačku $(0, 0)$ i

a) ne obuhvata tačku $(0, 0)$,

b) obuhvata tačku $(0, 0)$;

c) specijalno izračunati

$$\int_{\widehat{AB}} \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2},$$

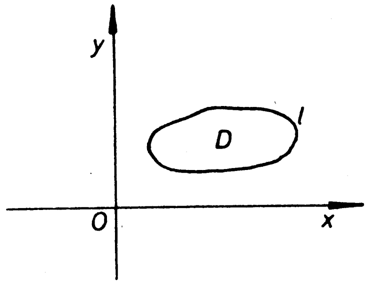
pri čemu je $\widehat{AB}$ luk kružnice $x^2+y^2=1$ koja je jednom pozitivno, a drugi put negativno orijentisana, a tačke A i B su date: $A(0, -1)$, $B(0, 1)$.

Rješenje. a) Ovdje je

$$P=\frac{-y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad Q=\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

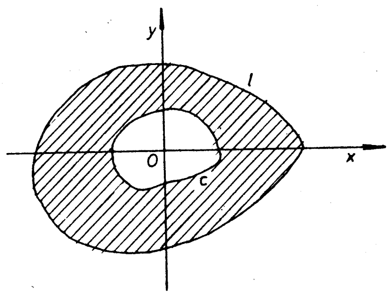
Ove funkcije su neprekidne u oblasti koja ne sadrži tačku (0, 0) (sl. 80), pa se može primijeniti Grinova formula. Dobija se

$$\oint_l \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=\iint_D 0\,dx\,dy=0.$$



Sl. 80

b) U slučaju kada kriva l obuhvata tačku (0, 0) nisu ispunjeni uslovi za primjenu Grinove formule. U ovom slučaju integral ima istu vrijednost za sve pozitivno orijentisane krive koje obuhvataju tačku (0, 0). Naime, na oblasti D (sl. 81) ograničenoj krivom $l'=l\cup(-c)$ ispunjeni su uslovi za primjenu Grinove formule, pa će biti



Sl. 81

$$\oint_{l\cup(-c)}=\iint_D 0\,dx\,dy=0,$$

tj.

$$\oint_l+\oint_{-c}=0,$$

dakle

$$\oint_l=-\oint_{-c}=\oint_c.$$

Znači, krivu l možemo izabrati proizvoljno, pa ćemo za l, radi jednostavnog računa, uzeti kružnicu x^2+ $+y^2=1$. Biće

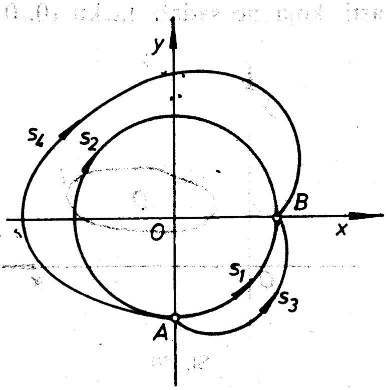
$$\oint_l=\int_{x^2+y^2=1}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi.$$

c) Izračunaćemo integral najprije po pozitivno orijentisanoj kružnici od tačke A do tačke B (na sl. 82 po putanji $\widehat{As_1B}$), a zatim po negativno orijentisanoj kružnici.

$$\int_{\widehat{As_1B}}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=\int_{-\pi/2}^{0}\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{\widehat{As_2B}}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=\int_{3\pi/2}^{0}\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=-\frac{3\pi}{2}.$$

Primjedba 1. Vidimo da su ovi integrali različiti. Poznato je da integral ne zavisi od putanje integracije ako su u podintegralnom izrazu $P\,dx+Q\,dy$ funkcije P i Q neprekidne, a izvodi $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ tih funkcija neprekidni i jednaki. U ovom slučaju te funkcije nisu neprekidne jedino u tački $(0, 0)$. Integral uzima dvije vrijednosti, jer na osnovu a) imamo



Sl. 82

$$\int_{\widehat{As_1B}} = \int_{\widehat{As_3B}} \quad \text{i} \quad \int_{\widehat{As_2B}} = \int_{\widehat{As_4B}}$$

za proizvoljan luk $\widehat{As_3B}$, odnosno $\widehat{As_4B}$ za koji $\widehat{As_1B}\cup\widehat{As_3B}$ odnosno $\widehat{As_2B}\cup\widehat{As_4B}$ ne obuhvata tačku $(0, 0)$, (sl. 82).

Primjedba 2. Dobijene dvije vrijednosti integrala vezane su relacijom

$$\int_{\widehat{As_1B}} = 2\pi + \int_{\widehat{As_2B}}.$$

U opštem slučaju, ako je (x_0, y_0) jedina tačka u kojoj funkcije P, Q, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ nisu neprekidne, a inače vrijedi $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, imamo

$$\int_{\widehat{As_1B}} = \oint_l + \int_{\widehat{As_2B}}$$

gdje pozitivno orijentisane jednostavno zatvorene krive l i $\widehat{As_1B}\cup\widehat{As_2B}$ obuhvataju tačku (x_0, y_0).

296. Neka funkcije $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ imaju prekid samo u jednoj tački M, dok inače vrijedi $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. Neka je

$$\oint_l P\,dx+Q\,dy=\Gamma,$$

pri čemu je l pozitivno orijentisana jednostavno zatvorena kriva koja obuhvata tačku M.

Dokazati da je

$$\int_{\widehat{AcB}} P\,dx+Q\,dy=n\cdot\Gamma+\int_{\widehat{AB}},$$

pri čemu kriva $\widehat{AcB}$ n-puta u pozitivnom smjeru obilazi tačku M, a integral $\int_{\widehat{AB}}$ uzet je po luku pozitivno orijentisane jednostavno zatvorene krive koja obilazi tačku M.

Rješenje. Dokaz ćemo izvesti za slučaj kada kriva c 3 puta obilazi oko tačke M (rasuđivanje je isto i za opšti slučaj).

Neka luk AB siječe krivu c u tačkama M_1, M_2 M_3 (sl. 83). Biće

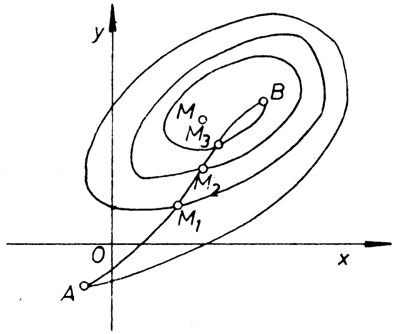
$$\int_{\widehat{AcB}} = \int_{\widehat{AcM_1}} + \int_{\widehat{M_1A}} + \int_{\widehat{AM_1}} + \int_{\widehat{M_1cM_2}} + \int_{\widehat{M_2M_1}} +$$

$$+ \int_{\widehat{M_1M_2}} + \int_{\widehat{M_2cM_3}} + \int_{\widehat{M_3M_2}} + \int_{\widehat{M_2M_3}} + \int_{\widehat{M_3cB}} =$$

$$\oint_{\widehat{AcM_1A}} + \int_{\widehat{AM_1}} + \oint_{\widehat{M_1cM_2M_1}} + \int_{\widehat{M_1M_2}} + \oint_{\widehat{M_2cM_3M_2}} +$$

$$+ \int_{\widehat{M_2M_3}} + \int_{\widehat{M_3cB}} = 3\Gamma + \int_{\widehat{AM_1}} + \int_{\widehat{M_1M_2}} +$$

$$+ \int_{\widehat{M_2M_3}} + \int_{\widehat{M_3cB}} = 3\Gamma + \int_{\widehat{AB}}.$$



Sl. 83

Izračunati:

297. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} 3x^2 y\,dx + (x^3+1)\,dy.$ **298.** $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy\,dx + x^2\,dy.$

299. $\displaystyle\int_{(0,\pi/2)}^{(\pi/2,\pi)} \cos y\,dx - x\sin y\,dy.$

300. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(3,3)} \frac{x-1}{(x-1)^2+(y-2)^2}\,dx + \frac{y-2}{(x-1)^2+(y-2)^2}\,dy.$

Rješenja:

297. Ispunjen je uslov $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, a funkcije su neprekidne u čitavoj ravni Oxy, pa je

$$\int_{(0.0)}^{(1,1)} P\,dx + Q\,dy = U(1,\ 1) - U(0,\ 0),$$

pri čemu je $dU = P\,dx + Q\,dy$. Odredimo funkciju U. Biće

$$U = \int 3x^2 y\,dx + \varphi(y) = x^3 y + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^3 + \varphi'(y) = (x^3+1) \Rightarrow$$

$$\varphi'(y) = 1, \text{ tj. } \varphi(y) = y + C.$$

Dakle je: $U = x^3 y + y + C$ i prema tome

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} = 1 + 1 - 0 - 0 = 2.$$

(vidjeti zadatak 271).

298. Integral ne zavisi od putanje integracije jer je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ a funkcije P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}$ su neprekidne svuda, pa je

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2\,xy\,dx + x^2\,dy = U(1,\ 1) - U(0,\ 0),$$

pri čemu je funkcija $U(x, y)$ takva da je njen totalni diferencijal $dU = 2xy\,dx + x^2\,dy$. Biće $U = x^2 y + C$; dakle $I = 1$.

299. $1 - \frac{\pi}{2}$.

300. Razlikovati dva slučaja, zavisno od toga da li je u pitanju luk pozitivno ili negativno orijentisane jednostavno zatvorene krive koja obilazi tačku (1.2). Vidjeti zadatak 296.

301. Ispitati da li integral

$$I(a) = \int_{\widehat{AB}} \frac{x^2 + ay}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{y - ax}{x^2 + y^2}\,dy$$

zavisi od puta integracije ili samo od krajnjih tačaka (putanja ne prolazi kroz (0, 0)). Koliko vrijednosti za određeno a i fiksne tačke A i B može da ima integral?

Rješenje. $P = \frac{x + ay}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{y - ax}{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{a(x^2 - y^2) - 2\,xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{a(x^2 - y^2) - 2\,xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Važi $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, ali P i Q nisu neprekidne u (0, 0). Zato treba izračunati integral po zatvorenoj liniji l koja obuhvata tačku (0, 0). Možemo uzeti da je l kružnica $x^2 + y^2 = 1$. Biće

$$I(a) = \oint_{x^2 + y^2 = 1} \frac{x^2 + ay}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{y - ax}{x^2 + y^2}\,dy = -a \cdot 2\,\pi.$$

Dakle, za određeno $a \neq 0$ i fiksne tačke A i B dvije su vrijednosti integrala. Za $a = 0$ je $I(a) = 0$, pa $\int_{\widehat{AB}}$ ima samo jednu vrijednost.

Izračunati površinu ograničenu linijama:

302. $y=x^2, \quad x=y^2, \quad 8xy=1.$ **303.** $y=0, \quad y=\frac{x}{2}, \quad x+y=3.$

304. $x=a\cos t, \quad y=b\sin t.$ **305.** $x=a\cos^3 t, \quad y=a\sin^3 t$ (astroida).

306. $x=2a\cos t-a\cos 2t, \quad y=2a\sin t-a\sin 2t$ (kardioida).

307. $x^3+y^3=3axy$ (Dekartov list).

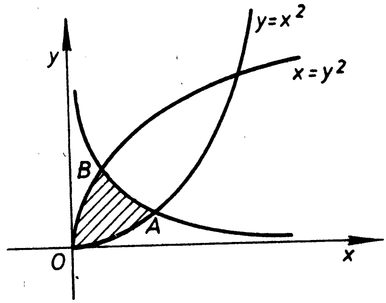
308. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2).$ **309.** $(x+y)^4=x^2y.$

310. $9y^2=4x^3-x^4.$ **311.** $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{12}=xy.$

Rješenja:

302. Iz Grinove formule dobija se da je površina oblasti D koju ograničava linija l data integralom

$$P=\frac{1}{2}\oint_l x\,dy-y\,dx.$$



Sl. 84

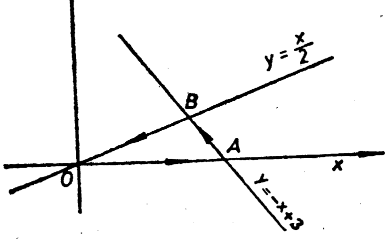
Kriva $8xy=1$ siječe krivu $y=x^2$ u tački $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, a krivu $x=y^2$ u tački $B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (sl. 84). Biće

$$P=\frac{1}{2}\int_{\widehat{OA}} x\,dy-y\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\widehat{AB}} x\,dy-y\,dx+\frac{1}{2}\int_{\widehat{BO}} x\,dy-y\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1/2} x^2\,dx-\frac{1}{8}\int_{1/2}^{1/4}\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int_{1/4}^{0} x\,dx=\frac{1+3\ln 2}{24}.$$

303. $P=\frac{1}{2}\oint_l x\,dy-y\,dx,$



Sl. 85

pri čemu je l kontura trougla određenog tačkama $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(2,1)$ (sl. 85). Biće

$$P=\frac{3}{2}.$$

304. $P=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt=ab\pi.$

305. $P=\frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{3\pi a^2}{8}$.

306. $6\pi a^2$.

307. Stavimo li da je $y=tx$, dobijaju se parametarske jednačine

$$x=\frac{3at}{1+t^3}, \quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Petlja Dekartovog lista se opisuje pri promjeni parametra t od 0 do ∞. Biće

$$dx=3a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}dt, \quad dy=3a\frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}dt$$

i zatim

$$P=\frac{9a^2}{2}\int\limits_0^{\infty}\frac{t^2}{(t+t^3)^2}dt=\frac{3}{2}a^2.$$

308. Staviti $y=x\ \mathrm{tg}\ t$. Dobija se $P=2a^2$.

309. $\frac{1}{210}$. **310.** $\frac{8}{3}$.

311. $\frac{1}{30}$. (Parametrizirati krivu, pa uzeti samo petlju u prvom kvadrantu).

312. Izračunati Gausov (Gauss) integral

$$G=\oint\limits_l\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\cdot ds,$$

gdje je $r=\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}$ intenzitet vektora $\vec{r}$ koji spaja fiksnu tačku $A(a, b)\notin l$ sa promjenjivom tačkom $M(x, y)\in l$, $(\vec{r},\vec{n})$ ugao između vektora $\vec{r}$ i spoljne normale (zatvorene) krive l u tački M.

Rješenje. Pokazaćemo da je $G=0$ ili $G=2\pi$ zavisno od toga da li l ne obuhvata ili obuhvata tačku A.
Kako je (sl. 86)

$$\measuredangle(\vec{n},\vec{i})=\measuredangle(\vec{n},\vec{r})+\measuredangle(\vec{r},\vec{i}),$$

to je

$$\cos\measuredangle(\vec{n},\vec{r})=\cos\left(\measuredangle(\vec{n},\vec{i})-\measuredangle(\vec{r},\vec{i})\right),$$

dakle,

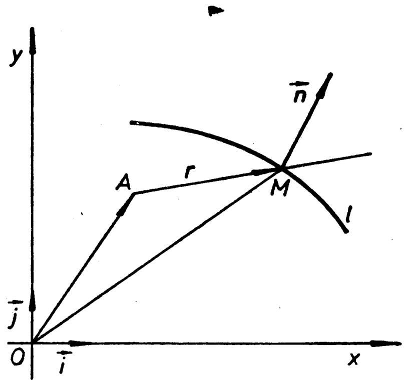
$$\cos \sphericalangle(\vec{n}, \vec{r}) = \cos \sphericalangle(\vec{n}, \vec{i}) \cos \sphericalangle(\vec{r}, \vec{i}) + \sin \sphericalangle(\vec{n}, \vec{i}) \cdot \sin \sphericalangle(\vec{r}, \vec{i}),$$

pri čemu je $\vec{i}$ jedinični vektor x-ose. Znači,

$$\cos(\vec{n}, \vec{r}) = \cos(\vec{n}, \vec{i}) \cdot \frac{x-a}{r} + \sin(\vec{n}, \vec{i}) \cdot \frac{y-b}{r},$$

pa je

$$G = \oint_l \left(\frac{x-a}{r^2} \cos(\vec{n}, \vec{i}) + \frac{y-b}{r^2} \sin(\vec{n}, \vec{i}) \right) ds.$$



Sl. 86

Uzimajući u obzir da je

$$dx = \cos(\vec{t}, \vec{i})\, ds, \quad dy = \sin(\vec{t}, \vec{i})\, ds,$$

pri čemu je $\vec{t}$ jedinični vektor tangente na krivoj l, to se dobija

$$G = \oint_l \frac{y-b}{r^2} dx - \frac{x-a}{r^2} dy.$$

Funkcije $P = \frac{y-b}{r^2}$, $Q = -\frac{x-a}{r^2}$ imaju u svim tačkama, osim u tački $A(a, b)$, neprekidne izvode

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{(y-b)}{r^2} = \frac{r^2 - 2(y-b)^2}{r^4} = \frac{(x-a)^2 - (y-b)^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x-a}{r^2}\right) = -\frac{r^2 - 2(x-a)^2}{r^4} = \frac{(x-a)^2 - (y-b)^2}{r^4}$$

i važi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Zato je $G = 0$ ako je l zatvorena kriva koja ne obuhvata tačku $A(a, b)$, a ima konstantnu vrijednost za sve zatvorene krive l koje obuhvataju tačku $A(a, b)$. Da odredimo tu konstantnu vrijednost, izaberimo za l kružnicu sa centrom u tački $A(a, b)$ i poluprečnikom $r = 1$. Biće

$$G = \oint ds = 2\pi.$$

313. Dokazati da je

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) dx\, dy = \varepsilon \oint_l \left[\frac{\partial U}{\partial x}\cos(\vec{i}, \vec{n}) + \frac{\partial U}{\partial y}\sin(\vec{i}, \vec{n})\right] ds,$$

gdje je $(\vec{i}, \vec{n})$ ugao pozitivnog smjera x-ose i vektora normale na krivoj l, a $\varepsilon = \pm 1$.

Rješenje. Kako je

$$\cos(\vec{i}, \vec{n}) = \varepsilon \sin(\vec{i}, \vec{t}), \quad \sin(\vec{i}, \vec{n}) = -\varepsilon \cos(\vec{i}, \vec{t}),$$

($\vec{t}$ je jedinični vektor tangente na krivoj l), imamo

$$\varepsilon \oint_l \left[\frac{\partial U}{\partial x}\cos(\vec{i}, \vec{n}) + \frac{\partial U}{\partial y}\sin(\vec{i}, \vec{n})\right] ds = \oint_l \left[\frac{\partial U}{\partial x}\sin(\vec{i}, \vec{t}) - \frac{\partial U}{\partial y}\cos(\vec{i}, \vec{t})\right] ds =$$

$$= \oint_l \left(-\frac{\partial U}{\partial y}\right) dx + \frac{\partial U}{\partial x} dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right] dx\, dy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) dx\, dy.$$

314. Dokazati da je

$$\iint_D V\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) dx\, dy = -\iint_D \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy +$$

$$+ \oint_l V\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cos(\vec{i}, \vec{n}) + \frac{\partial U}{\partial y}\sin(\vec{i}, \vec{n})\right) ds.$$

Uputstvo: Krivolinijski integral na desnoj strani jednakosti pretvoriti u krivolinijski integral druge vrste, pa primijeniti Grinovu formulu.

Ako stavimo

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos(\vec{i}, \vec{n}) + \frac{\partial U}{\partial y}\sin(\vec{i}, \vec{n}),$$

onda iz zadatka 314. se dobija druga Grinova formula u ravni

$$\iint_D (V\Delta U - U\Delta V)\, dx\, dy = \oint_l \left(V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial V}{\partial n}\right) ds.$$

315. Pokazati da funkcija $V=\ln r=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ zadovoljava jednačinu $\Delta V=0$ (u svim tačkama različitim od (a, b)).

316. Neka neprekidna funkcija $U(x, y)$ ima neprekidne parcijalne izvode do drugog reda u oblasti D. Tada je

$$U(A)=\frac{1}{2\pi}\oint_l\left[U\frac{\partial(\ln r)}{\partial n}-\ln r\frac{\partial U}{\partial n}\right]ds+\frac{1}{2\pi}\iint_D \Delta U\cdot\ln r\cdot dx\,dy, \qquad (1)$$

pri čemu je A ma koja fiksirana unutrašnja tačka oblasti D koju ograničava kontura l, a r je rastojanje promjenjive tačke M od tačke A.

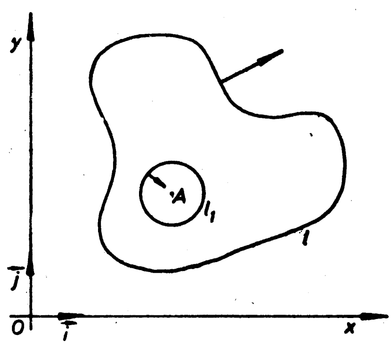
Specijalno, ako je U harmonijska funkcija, tj. ako je $\Delta U=0$, onda je

$$U(A)=\frac{1}{2\pi}\oint_l\left[U\frac{\partial(\ln r)}{\partial n}-\ln r\frac{\partial U}{\partial n}\right]ds. \qquad (2)$$

Rješenje. Na funkcije $U=U(x, y)$ i $V=\ln r$ primijenimo drugu Grinovu formulu na oblasti P koja je ograničena linijom l i kružnicom l_1 poluprečnika ε a sa cntrom $A(a, b)$ (sl. 87). Biće

$$\iint_P \ln r\cdot\Delta U\,dx\,dy=\oint_l\left[\ln r\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial(\ln r)}{\partial n}\right]ds+\oint_{l_1}\left[\ln r\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial(\ln r)}{\partial n}\right]ds \qquad (3)$$

(po liniji l traži se izvod u smjeru spoljne normale, a po kružnici l_1 u smjeru unutrašnje normale).



Sl. 87

Kako je

$$-\oint_{-l_1}U\frac{\partial(\ln r)}{\partial n}ds=\oint_{l_1}U\frac{\partial(\ln r)}{\partial n}ds=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\oint_{l_1}U\left[\frac{\partial r}{\partial x}\cos(\vec{n},\vec{i})+\frac{\partial r}{\partial y}\sin(\vec{n},\vec{i})\right]ds=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\oint_{l_1}U\left[\frac{x-a}{r}\cdot\cos(\vec{n},\vec{i})+\right.$$

$$\left.+\frac{y-b}{r}\sin(\vec{n},\vec{i})\right]ds=\frac{1}{\varepsilon}\oint_{l_1}U[\cos^2(\vec{n},\vec{i})+\sin^2(\vec{n},\vec{i})]\,ds=\frac{1}{\varepsilon}\oint_{l_1}U\,ds,$$

to, primjenjujući teoremu o srednjoj vrijednosti integrala, dobija se

$$-\oint_{-l_1}U\frac{\partial(\ln r)}{\partial n}ds=\frac{1}{\varepsilon}\cdot U(M_0)\cdot\varepsilon\cdot 2\pi=2\pi\cdot U(M_0), \quad M_0\in l_1.$$

Iz (4) slijedi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \oint_{l_1} U \frac{\partial(\ln r)}{\partial n} ds = 2\pi U(A). \tag{5}$$

Drugi integral po kružnici l_1 teži nuli kada $\varepsilon\to 0$, jer

$$\oint_{-l_1} \ln r \frac{\partial U}{\partial n} ds = \ln\varepsilon \oint_{-l_1} \frac{\partial U}{\partial n} ds = \ln\varepsilon \cdot \frac{\partial U(M_0)}{\partial n} \cdot 2\varepsilon\pi \to 0,\ (\varepsilon\to 0), \tag{6}$$

jer $\left|\frac{\partial U(M_0)}{\partial n}\right| < K$ (po pretpostavci izvodi od $U(x, y)$ su neprekidne funkcije). Pri izvođenju jednakosti (6) takođe je primijenjena formula o srednjoj vrijednosti integrala.

Na osnovu (5) i (6) iz (3) se dobija (1), jer kad $\varepsilon\to 0$, tada $\iint_P \ln r\cdot\Delta U\,dx\,dy$ teži dvostrukom integralu u jednakosti (1). Posljednji integral je nesvojstven (funkcija $\ln r\to -\infty$ kad $r\to 0$), ali je konvergentan, jer

$$I = \iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant\varepsilon} U \ln r\,dx\,dy \to 0\ (\varepsilon\to 0).$$

Naime

$$|I| \leqslant K \iint_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant\varepsilon} |\ln r|\,dx\,dy.$$

Prelazeći na polarne koordinate dobija se (za $\varepsilon<1$)

$$|I| \leqslant K\cdot 2\pi \int_0^{\varepsilon} |\ln r|\,r\,dr = -K\,2\pi \int_0^{\varepsilon} r\ln r\,dr \to 0\ (\varepsilon\to 0).$$

317. Neka je $U(x, y)$ harmonijska funkcija (tj. $\Delta U = 0$) u oblasti D, $A(a, b)$ unutrašnja tačka oblasti D, a $K(R)$ kružnica poluprečnika R, s centrom u $A(a, b)$, koja sva leži u D. Tada važi

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi R} \int_{K(R)} U(x, y)\,ds.$$

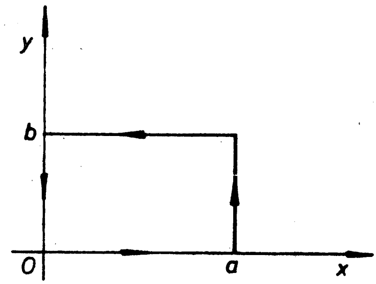
Uputstvo. Primijeniti formulu (2) iz zadatka 316. na oblast D' odredjenu kružnicom $K(R)$.

318. Polazeći od integrala

$$\oint_l e^{-x^2+y^2}\cos(2xy)\,dx + e^{-x^2+y^2}\sin(2xy)\,dy$$

po konturi pravougaonika $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ (sl. 88), izračunati

$$I(b)=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx.$$



Sl. 88

Rješenje. Integral je oblika

$$\oint_l P\,dx+Q\,dy,$$

pri čemu je

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=e^{-x^2+y^2}[2y\cos(2xy)-$$
$$-2x\sin(2xy)].$$

Otuda je po Grinovoj formuli

$$\oint_l e^{-x^2+y^2}[\cos(2xy)\,dx+\sin(2xy)\,dy]=0.$$

Razmotrimo integral po svakoj od stranica pravougaonika (sl. 88).

Za $y=0$, $\quad I_1=\int_0^a e^{-x^2}\,dx,$

za $x=a$, $\quad I_2=\int_0^b e^{-a^2}e^{y^2}\sin(2ay)\,dy,$

za $y=b$, $\quad I_3=\int_a^0 e^{b^2}e^{-x^2}\cos(2bx)\,dx,$

za $x=0$, $\quad I_4=0.$

Dakle, vrijedi

$$\int_0^a e^{-x^2}dx+\int_0^b e^{-a^2}e^{y^2}\sin(2ay)\,dy+\int_a^0 e^{b^2}e^{-x^2}\cos(2bx)\,dx=0. \qquad (1)$$

Kada $a\to\infty$, tada

$$\int_0^a e^{-x^2}dx\to\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \text{(Poasonov integral)},$$

a

$$\lim_{a\to\infty} e^{-a^2}\cdot\int_0^b e^{y^2}\sin(2ay)\,dy=0,$$

jer je

$$\left|\int_0^b e^{y^2}\sin(2ay)\,dy\right|\leqslant\int_0^b e^{y^2}dy<e^{b^2}\int_0^b dy=be^{b^2},\quad (b>0).$$

Zato se iz (1) dobija

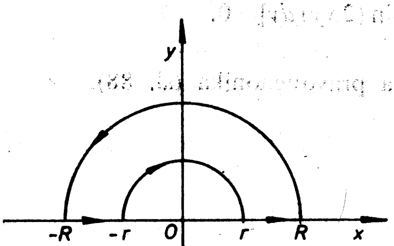
$$e^{b^2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

tj.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)\,dx=e^{-b^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

319. Polazeći od integrala $\oint_l Pdx+Qdy$, pri čemu je

$$P=\frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x\sin x-y\cos x),\qquad Q=\frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x\cos x+y\sin x),$$



Sl. 89

a kontura l se sastoji od polukružnica poluprečnika R i r i odsječaka x-ose (sl. 89), izračunati

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}.$$

Uputstvo. Najprije primijeniti Grinovu formulu, zatim procijeniti integrale po polukružnicama puštajući da $R\to\infty$, odnosno $r\to 0$. Prilikom procjene integrala $I(R)$ po polukružnici poluprečnika R koristiti Jordanovu nejednakost:

$$\text{Za}\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\quad\text{važi}\quad\frac{2}{\pi}\varphi\leqslant\sin\varphi\leqslant\varphi,\ \text{tj.}\ e^{-R\sin\varphi}\leqslant e^{\frac{-2R\varphi}{\pi}}.$$

Pokazuje se da $I(R)\to 0$, kada $R\to\infty$.

Integral $I(r)$ po polukružnici poluprečnika r teži ka π, kada $r\to 0$. Konačno

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

320. Polazeći od integrala $\oint_l Pdx+Qdy$, pri čemu je

$$P=e^{-2xy}\cos(x^2-y^2),\quad Q=-e^{-2xy}\sin(x^2-y^2),$$

a l kontura data na sl. 90, izračunati (Freneov) integral

$$\int_0^{\infty}\cos x^2\,dx.$$

Rješenje. Za date funkcije je

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2ye^{-2xy}\sin(x^2-y^2)-2xe^{-2xy}\cos(x^2-y^2)$$

pa se primjenom Grinove formule dobija

$$\int\limits_{\overline{OA}}+\int\limits_{\widehat{AB}}+\int\limits_{\overline{BO}}=0. \tag{1}$$

S druge strane

$$\int\limits_{\overline{OA}} Pdx+Qdy=\int_0^R \cos x^2\,dx,$$

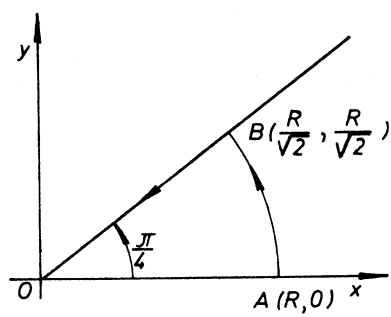
$$\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\varphi}\left[\cos(R^2\cos 2\varphi)(-R\sin\varphi)-\right.$$

$$\left.-\sin(R^2\cos 2\varphi)(R\cos\varphi)\right]d\varphi$$

($\widehat{AB}$ je luk kružnice),

$$\int\limits_{\overline{BO}} Pdx+Qdy=\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{0} e^{-2x^2}\,dx=$$

$$=-\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} e^{-2x^2}\,dx.$$



Sl. 90

Kako je

$$\left|\int\limits_{\widehat{AB}}\right|\leqslant 2R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\varphi}\,d\varphi,$$

to, koristeći Jordanovu nejednakost

$$\frac{2}{\pi}\varphi\leqslant\sin\varphi\leqslant 1,\quad \text{za}\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

dobijamo

$$\left|\int\limits_{\widehat{AB}}\right|\to 0,\quad \text{kad}\quad R\to\infty.$$

Sada se iz (1) dobija

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_0^R \cos x^2\,dx-\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} e^{-2x^2}\,dx\right]=0,$$

dakle,

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \cos x^2\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} e^{-2x^2}\,dx.$$

Kako je

$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} e^{-2x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} e^{-(\sqrt{2}x)^2}\,d\left(x\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-t^2}\,dt,$$

a

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

to se konačno dobija

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$